

## O Uso do Algoritmo Genético em Modelos de Oligopólio

*Marina Moreira da Gama\**

### **Resumo**

O objetivo deste trabalho foi estudar um instrumento de ‘replicagem dinâmica’ para modelos de oligopólio capaz de captar o caráter temporal e evolutivo da conduta entre firmas em um mercado ao longo do tempo. O instrumento escolhido foi o algoritmo genético – AG, que seleciona, a cada período, as estratégias mais bem sucedidas em um mercado, pois considera as firmas como agentes adaptativos. Apliquei o AG em um modelo de oligopólio de Cournot estático, pois com ele saberia de antemão qual o resultado esperado (e posteriormente obtido) na simulação: a ‘replicagem dinâmica’ do modelo necessariamente resultaria em um estado estacionário em que a melhor estratégia de escolha da firma seria a quantidade de equilíbrio do caso clássico. Meu instrumento escolhido de ‘replicagem dinâmica’ evolucionário (o AG) é consistente, e a firma escolhe a cada período aquela estratégia que lhe é mais lucrativa, que obviamente, no modelo de Cournot, é quantidade que leva ao equilíbrio de Nash. PALAVRAS-CHAVE: Modelo de Oligopólio; Algoritmo Genético; Replicação Dinâmica.

### **Abstract:**

The paper’s purpose is to study a dynamic replicator’s instrument for oligopolies models that can capture the temporal and evolutionary character of the conduct’s firms in a market. The instrument that I choose was the Genetic Algorithm – GA, which selects, in each period, the firm’s best strategies, because it considers the firms as adaptative agents. I have applied the GA in a Cournot model for simplicity, since with that I could know at first the expect result: the Nah equilibrium of the classic model. The GA ’s consistent because the firm chooses in each period the strategy that results in higher profits, which is, obviously, at the Cournot model, the quantity of Nash’s equilibrium. KEY-WORDS: Oligopoly Models; Genetic Algorithm; Replicator Dynamic.

**Classificação JEL /JEL Classification:** L11, L13, D81, D83.

**Belo Horizonte, Maio de 2008**

---

\* Doutoranda em economia pelo CEDEPLAR/ UFMG e bolsista CAPES.

## **Introdução**

A dinâmica de um mercado é um processo evolutivo, no qual as firmas escolhem as estratégias que irão utilizar e aprendem tanto com seus sucessos e erros quanto com os de suas rivais. Modelos de oligopólio que tratam a conduta das empresas como um processo adaptativo são raros, não pela irrelevância do tema, mas pela sua dificuldade de análise. Esta dificuldade advém da necessidade de se captar o processo adaptativo de firmas através de um instrumento evolutivo consistente. Assim, o objetivo deste trabalho foi estudar um instrumento de ‘replicagem dinâmica’ de modelos de oligopólio capaz de captar o caráter dinâmico e evolutivo da conduta de firmas em um mercado ao longo do tempo. A ferramenta que melhor atende meus objetivos é um tipo de algoritmo evolucionário (o algoritmo genético ou AG) que seleciona as estratégias mais bem sucedidas em um mercado.

As firmas de um mesmo mercado geralmente são assimétricas e possuem habilidade de criar e recriar estratégias de mercado diferentes, a fim de responder às mudanças do ambiente, implicando que a experiência e a aprendizagem podem ser fontes de vantagens competitivas, já que estão inseridas em um ambiente dinâmico, mas de racionalidade limitada. Para entender o processo de funcionamento de um mercado com estas características é necessário utilizar um instrumento válido. A validade ou consistência do instrumento foi verificada através da aplicação do algoritmo genético em um modelo de Cournot estático, pois com ele saberia de ante-mão qual o resultado esperado (e obtido): a ‘replicagem dinâmica’ necessariamente resultaria em um estado estacionário em que a estratégia de escolha da firma mais bem sucedida seria a quantidade do Equilíbrio de Nash do caso estático. Se meu instrumento de ‘replicagem dinâmica’ evolucionário é consistente, de tal forma que a firma escolha a cada período aquela estratégia que lhe é mais lucrativa, obviamente, no modelo de Cournot, esta será a quantidade que leva ao equilíbrio de Nash.

Este trabalho se divide em seis seções, além desta introdução. Na primeira faço uma revisão de como a conduta entre empresas é representada pelos modelos de oligopólio atualmente na Literatura. Na segunda explico o que é o algoritmo genético, de onde veio e quais são suas utilidades. Na terceira mostro como poderei aplicar um AG em um modelo de oligopólio. Na quarta, mostro qual o modelo de oligopólio que irei simular e qual o AG utilizado para tanto. Na quinta parte apresento os resultados, felizmente os esperados, e na última parte concluo o trabalho.

### **1. A Conduta em Modelos de Oligopólios**

A conduta das firmas de um mercado é tratada tradicionalmente através de modelos de oligopólio nos quais as firmas, ao tomarem suas decisões de produção, consideram as reações de suas rivais mesmo agindo individualmente. A firma acredita que a reação das suas rivais é dada e não influenciável pela sua decisão. Algum poder de mercado pode emergir deste comportamento, pois algumas ou todas as firmas deste mercado podem ser capazes de aumentar lucrativamente os preços acima do nível competitivo. Mesmo que a firma não espere influenciar as suas competidoras, cada firma irá escolher o seu preço ou quantidade de produção baseada na hipótese de que nem no período  $t$  ou qualquer outro período futuro, as ações das outras firmas serão influenciadas pelas suas decisões no período  $t$ .

Existem dois modelos de oligopólio estáticos utilizados pela Literatura (Fiúza, 2002, Tirole, 2000) que captam a interação estratégica entre firmas: o modelo de produto homogêneo e variável estratégica de escolha da firma quantidade (Cournot) ou preço (Bertrand) e o modelo de produto diferenciado e variável estratégica de escolha da firma preço ou quantidade. A distinção básica entre estes dois modelos recai sobre a reação de uma firma à escolha estratégica de sua rival, reação esta que poderá ser ativa ou passiva dependendo do fato das estratégias serem complementares ou substitutas. Uma estratégia complementar é aquela que induz uma resposta similar de suas rivais, e uma estratégia é substituta se induz uma resposta oposta dos concorrentes, mantendo constante outras características do mercado.

Escolhas de capacidade são tipicamente estratégias substitutas: se uma firma expandir sua produção total, então a escolha ótima das firmas remanescentes é, por sua vez, reduzir a capacidade que mantêm, ou ao menos, não aumentá-la. Escolhas sobre produção são estratégias substitutas porque, quanto maior for o nível de capacidade que uma firma espera que a sua rival escolha, menor o nível que irá escolher para si mesma. Aumentar a capacidade em resposta a um nível de capacidade esperado maior por parte das suas rivais só faz sentido como parte de um ato de coordenação entre firmas. Escolhas sobre preços, por sua vez, são estratégias complementares: se uma firma aumenta o preço do produto que produz, então, a escolha ótima das firmas remanescentes é aumentar seus preços também, geralmente por um montante menor, ou pelo menos, não reduzi-los. Escolhas em preços são estratégias complementares porque quanto mais alto for o preço que uma firma espera que sua rival escolha, maior será o preço que ela própria irá escolher. Reduzir o preço em resposta a um aumento no preço das concorrentes só faz sentido como parte de uma estratégia de guerra de preços de uma das firmas, estratégia esta que geralmente não é racional<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> A não ser que o ganho supranormal no tempo da redução do preço compense futuros prejuízos.

No modelo de oligopólio com produto homogêneo e quantidade como variável estratégica de escolha da firma, esta escolhe o nível de produção que maximiza o seu lucro, dada o nível de produção ótimo de suas rivais. Se a função de demanda inversa por um produto homogêneo seja dada por  $P = D(Q)$ , no qual  $Q$  é a quantidade demandada do bem homogêneo ao preço de mercado  $P$ , a curva de oferta será dada pela maximização do lucro da firma  $i$ :

$$\Pi_i = D(Q) * Q_i - C_i(Q_i).$$

A Condição de Primeira Ordem (CPO) determinará a solução do modelo:

$$\partial \Pi_i / \partial Q_i = P + Q_i * (\partial P / \partial Q * \partial Q / \partial Q_i) - CMg_i = 0$$

sendo  $\partial Q / \partial Q_i$  igual a  $\partial Q_i / \partial Q_i + \partial Q_{i-1} / \partial Q_i = 1 + \theta_i$ , no qual  $\theta_i$  reflete o efeito da produção de uma firma na produção das demais firmas, mais precisamente, o  $\theta_i$  reflete a variação conjectural da firma ou a suposição que a firma  $i$  precisa fazer sobre como as outras firmas ( $i-1$ ) reagirão a sua mudança de produção, ou mais precisamente,  $\theta_i$  é um parâmetro de conduta, é a medida das “conjecturas” da firma  $i$  a respeito da estratégia das demais competidoras (Bresnahan, 1989). A questão da interação estratégica é tratada, desde o trabalho de Bowley (1924), como a possibilidade de captação de qualquer variação conjectural entre as firmas para além dos modelos de oligopólio difundidos, como o modelo de oligopólio de Cournot, cuja variável de escolha da firma é quantidade, e o modelo de Bertrand, cuja variável de escolha da firma é preço.

Assumindo que todas as firmas possuam a mesma função custo (ou difiram somente em relação ao custo fixo) e que todas possuam a mesma conjectura sobre as reações das demais,  $\theta$ , a CPO pode ser rescrita como:  $(P - CMg) / P = s_i(1 + \theta) / \eta$ , no qual  $s_i$  é a participação de mercado da firma  $i$  e  $\eta$  a elasticidade-preço da demanda do mercado (Bresnahan, 1989). A primeira vista, a equação acima define apenas um modelo estrutural estático com uma estratégia fixa, mas usando dados de demanda e custo, o parâmetro  $\theta$  poderia ser identificado e representaria uma medida para a competição.

Vários artigos na Literatura de estimação de conduta<sup>2</sup> acreditam um sistema formado pela equação de demanda e por equações de precificação para cada firma, de forma a obter estimativas livres dos parâmetros de demanda (e portanto das elasticidades), custos, e conduta (Huse & Salvo, 2006). A

---

<sup>2</sup> Ver, por exemplo, os artigos pioneiros de Iwata (1974), Gollop e Roberts (1979), Roberts (1984), Suslow (1986) e Bresnahan (1987), além dos trabalhos mencionados no texto.

estimativa livre de  $\theta_i$  pode ser interpretada como uma medida de quão próximo está o equilíbrio observado das previsões teóricas associadas a hipóteses de conduta alternativas. Por exemplo, uma estimativa de  $\theta_i$  próxima de 0 é interpretada como evidência de que a indústria tem comportamento que tende ao competitivo. Na prática, apesar da especificação da equação acima permitir a variação de conduta ao longo do tempo, o parâmetro de conduta é normalmente restringido a um só valor médio ao longo do tempo ou o sistema é especificado de forma agregada, ao nível de indústria, por não se dispor de dados ao nível da firma. (Omita-se, portanto, o subscrito  $i$  para firma) e o parâmetro de conduta  $\theta$  recebe a interpretação de grau médio de conluio na conduta (*average collusiveness of conduct*, Bresnahan 1989).

A maioria dos modelos de oligopólio, ao tratar da interação estratégica entre firmas, supõe que as estratégias escolhidas pelas firmas são simétricas e resultantes de algum processo de maximização com restrições. Isto porque a análise é baseada no encontro do equilíbrio entre as curvas de reação das firmas e cada curva de reação indica a expectativa que aquela firma faz da reação da(s) outra(s) firma(s) concorrente(s) sobre uma estratégia fixa. O problema é exatamente considerar a reação da rival como uma interação sobre uma escolha fixa que ocorre uma única vez e simultaneamente no mercado (Giocoli, 2005). O conceito por trás das curvas de reação é dinâmico e envolve a interação entre firmas ao longo do tempo, como um processo de ação e reação de escolha de uma estratégia que pode se alterar de acordo com o desempenho das firmas no mercado (Shapiro, 1989). Como afirma Tirole (1988, p. 244), determinar um equilíbrio estático para um problema dinâmico é no mínimo questionável<sup>3</sup>.

Berry e Pakes (1993) comparam os resultados de oligopólio cuja variável estratégica é quantidade (Cournot) usando dois tipos de modelos: um no qual a interação entre as firmas é estática e outro no qual as firmas competem em um jogo dinâmico. O primeiro caso é analisado em Salant, Switzer e Reynolds (1983) que mostram que, em um jogo estático, nenhuma firma teria o incentivo em adotar uma estratégia colusiva, pois a redução em quantidade por parte da firma líder seria compensada com o aumento da quantidade ofertada das rivais e os lucros seriam menores para todas. Cheong e Judd (2001) analisam o problema dinâmico. Eles mostram que, ao se reproduzir o mesmo modelo num ambiente dinâmico com custos de ajustamento, os resultados podem ser opostos aos previstos no modelo estático, isto é, comportamentos colusivos, com aumento de preços no mercado, podem ser lucrativos mesmo quando as firmas competem em quantidades. Nesse caso, uma firma com poder de mercado aumentaria o valor presente dos seus lucros na trajetória até o novo *steady state*.

---

<sup>3</sup> Friedman (1977 e 1983) criticou duramente a estaticidade da análise oligopolista via variação conjectural.

Resultados dessa natureza também surgiriam em modelos como o de Pakes e McGuire (1993) ou Ericson e Pakes (1995).

Apesar da grande evolução da introdução de modelos dinâmicos para análise de modelos de oligopólio, ainda não existe uma discussão sistemática sobre o assunto que incorpore a dinâmica do mercado ao mesmo tempo que a heterogeneidade nos comportamento de firmas que interagem em um ambiente de racionalidade limitada. Como acredito que a conduta das firmas seja resultado de um processo de geração de assimetrias na busca constante por um melhor desempenho no mercado, e que esta geração de assimetrias seja conseguida através da imitação, experimentação e adaptação (aprendizado), acho relevante a construção de um modelo evolucionário que analise a interação estratégica entre firmas. Mas para tanto, é fundamental descobrir, inicialmente, um instrumental de replicação dinâmica do modelo que seja evolutivo.

## **2. O Funcionamento do AG**

Nos oligopólios as demandas são inter-relacionadas: uma mudança na quantidade de produção de uma firma implica em ajustamentos pelas empresas rivais. Assim, quando uma firma está prestes a tomar uma decisão de mercado, ela conjectura sobre os possíveis ajustamentos das demais competidoras do mercado. No entanto é extremamente difícil captar as variações conjecturais das firmas. Modelos de oligopólio estáticos buscam apenas caracterizar a oferta num dado período, não analisando a interação entre as firmas ao longo do tempo, e os dinâmicos não modelam a possibilidade de aprendizado pela firma devido ao seu contato com o ambiente e com as firmas rivais. A solução para este problema encontrada por alguns economistas foi o uso de algoritmos evolucionários, que possibilitam que as firmas interajam ao longo do tempo com a capacidade de escolher aquela estratégia que lhe seja mais conveniente.

Utilizamos um algoritmo evolucionário para captar a interação estratégica entre as firmas de um mercado ao longo do tempo porque acreditamos ser este um processo adaptativo. Um algoritmo evolucionário é uma técnica de busca inspirada na Biologia que utiliza o conceito de sobrevivência do mais apto para solucionar um problema particular, isto é, é um algoritmo que busca o indivíduo mais apto em uma população, para então reproduzi-lo.

Inicialmente descrito por Holland (1975)<sup>4</sup>, os algoritmos evolucionários foram elaborados para solucionar problemas de otimização e seleção dos ótimos locais (Biethahn *et al*, 1995), até a sugestão de Fudenberg & Levine (1998) para o seu uso nos modelos de aprendizagem com racionalidade limitada. A partir daí, excluindo os trabalhos pioneiros de Axelrod (1984) e Miller (1986), os algoritmos evolucionários passaram a ser usados com mais frequência em economia<sup>5</sup>.

Mais especificamente, nas pesquisas econômicas, algoritmos evolucionários foram utilizados para modelar o comportamento e a interação de agentes heterogêneos com racionalidade limitada, sobretudo se possuem um comportamento adaptativo, dando *insights* sobre a dinâmica e características de um determinado mercado (Alkemade, 2004). Segundo Holland (1975), um agente possui comportamento adaptativo se a ele pode ser atribuído um valor relacionado à sua *performance* no ambiente em que interage, e assim este agente se comportará de forma a aumentar este valor no tempo.

Os algoritmos evolucionários consistem em diferentes técnicas tais como programação genética, estratégias evolucionárias e algoritmos genéticos. Neste trabalho utilizamos um algoritmo genético (AG). As características básicas do AG, e que o configura como um algoritmo evolucionário, são: i) variação através da recombinação (*crossover*); ii) variação através da mutação; e iii) seleção proporcional ao desempenho (reprodução). Assim, o AG pode ser utilizado para representar o processo evolutivo (adaptativo) de estratégias ao longo do tempo.

AG, então, é um processo estocástico no qual uma população de cromossomos é transformada em outra em repetidas rodadas. Estes cromossomos são entendidos como estratégias de agentes econômicos. Em cada rodada do AG ocorrem basicamente dois processos, a geração de variedade e a restrição de variedade. O processo de geração de variedade consiste na criação de novas estratégias pelos agentes econômicos através da reprodução, ou aprendizado pela imitação, recombinação, que é o aprendizado pela comunicação, e a mutação, aprendizado pela inovação. Todos estes processos, ou operadores genéticos, utilizam as estratégias antigas para encontrar as novas estratégias. O processo de restrição de variedade é comandado pelo operador genético seleção. A seleção diminui o número de estratégias na população. Primeiro ela avalia o sucesso de cada estratégia no ambiente de interação das estratégias, depois ela seleciona somente as melhores estratégias, e estas irão fazer parte da nova população. O processo se repete até que algum tipo de convergência seja atingido.

---

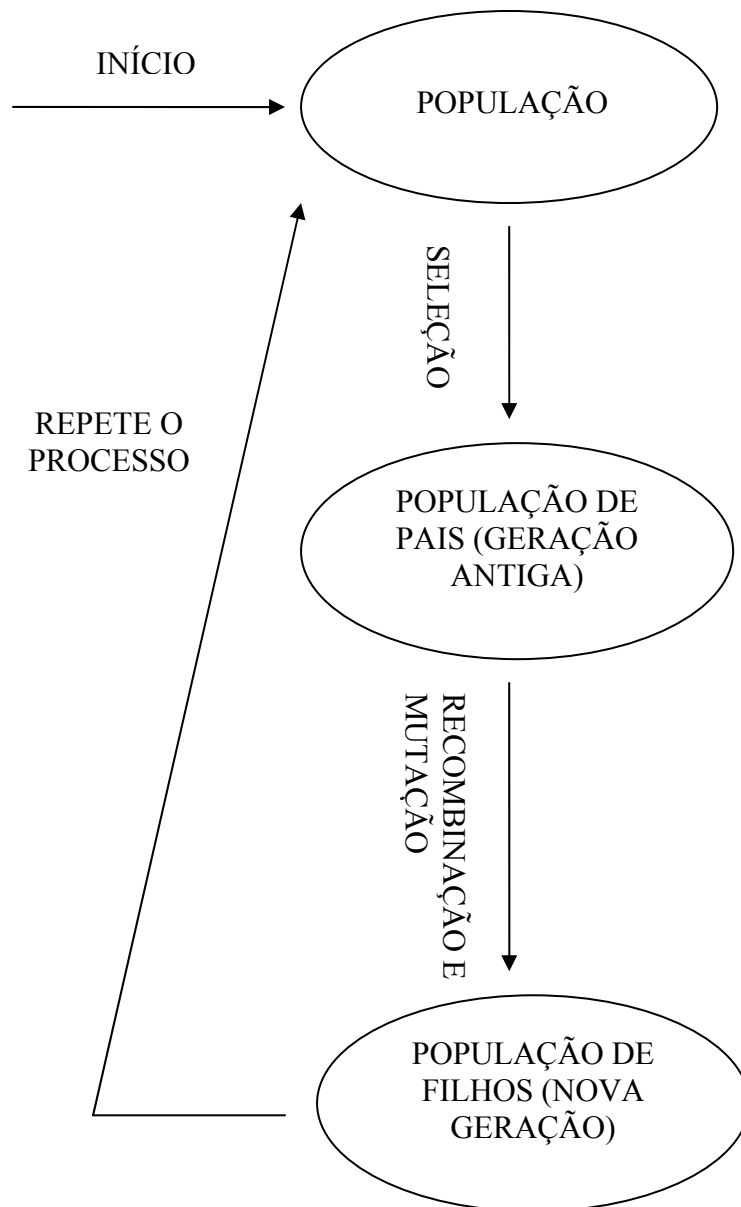
<sup>4</sup> Ver Mitchell, 1996, Goldberg, 1989, ou Holland (1992) para uma resenha sobre o assunto.

<sup>5</sup> Um volume do Computational Economics de 1995 foi dedicado exclusivamente às aplicações de algoritmos genéticos em economia, (Vol8, n.3), além do livro sobre aplicações econômicas do AG de Dawid (1996).

Neste processo, primeiramente uma população de estratégias (cromossomos) aleatórias iniciais é gerada para sua posterior seleção através de seu desempenho no ambiente em que está inserida. O processo se inicia com a representação dos cromossomos como um segmento de genes codificados em números binários (zero e um). Um conjunto completo de informação genética é chamado de genoma. São estes cromossomos (estratégias) que determinam o comportamento dos agentes e este comportamento é chamado de fenótipo. Esta população de cromossomos é subsequentemente transformada e melhorada em uma sequência de gerações através de dos operadores genéticos seleção, recombinação (troca de informação entre estratégias) e mutação (inserção de nova informação).

A seleção escolhe as melhores estratégias (com os maiores resultados), entre aqueles já existentes e as novas, que servirão como 'pais' para as futuras gerações de estratégias. Isto corresponde ao conceito de sobrevivência do mais apto. A prole então é formada por uma recombinação de cromossomos dos pais, que poderão sofrer pequena mutação. Assim, uma estratégia nova poderá ser mais bem sucedida do que uma antiga, quando submetida ao ambiente onde a interação entre agentes ocorre, e ser selecionada para o próximo período. A figura abaixo (Michell, 1996) descreve este processo.

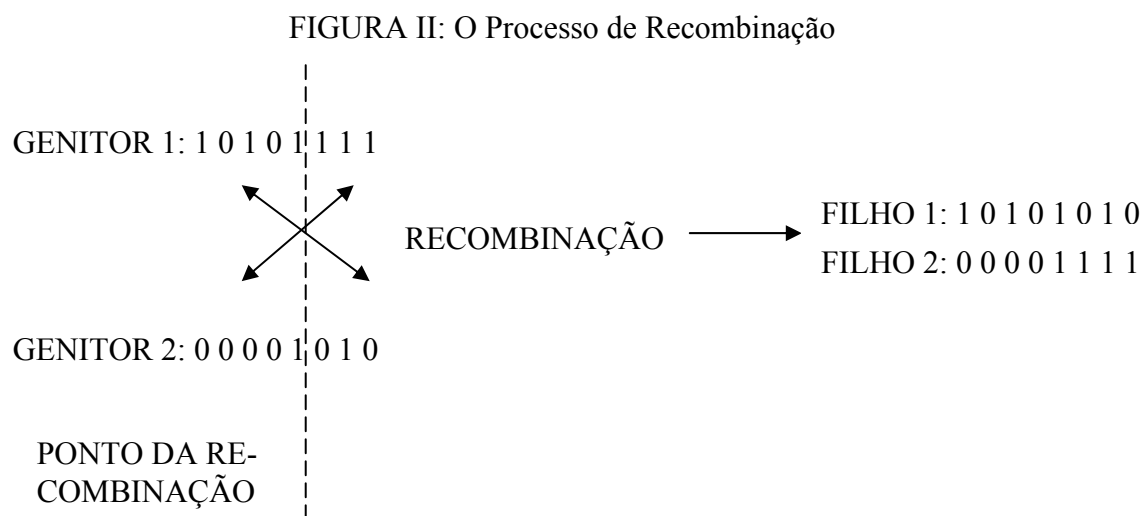
FIGURA I: O Processo AG



A seleção, ou reprodução, escolhe qual material genético irá ser reproduzido na próxima geração. Quanto mais apto for o cromossomo, maior a chance que possui de ser reproduzido na próxima geração. O mais conhecido esquema de seleção é aquele que é proporcional ao desempenho (*roulette wheel selection*): a cada cromossomo é atribuído uma parte do todo, sendo o tamanho da parte proporcional ao seu desempenho. A nova geração de população de cromossomos será então determinada aleatoriamente (como o girar de uma roleta de cassino) pela substituição dos cromossomos com piores desempenhos depois que a todos os cromossomos foram atribuídos resultados.

A recombinação é uma das formas de introdução de variedade no processo e é também chamada de operação de *crossover*. É a recombinação de genomas já existentes (pais) para dar criação a novos

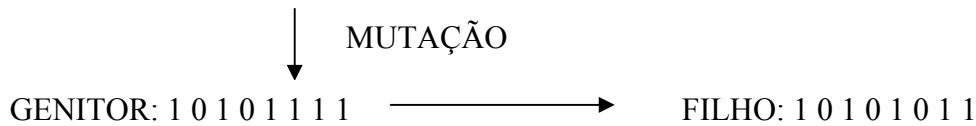
genomas (filhos). Cada filho recebe material genético de cada um dos pais. Existem infinitas formas com as quais este operador genético pode ser aplicado em uma população de cromossomos. As três formas mais conhecidas de ocorrência de *crossover* são as operações de um-ponto, de dois-pontos e de três-pontos. Um *crossover* de um-ponto, um ponto no cromossomo é selecionado aleatoriamente para dividir o cromossomo em duas partes e os dois cromossomos de mesmo tamanho da nova geração (filhos) são criados através de uma recombinação das partes individuais dos cromossomos da geração mais antiga (pais). O *crossover* de dois-pontos e o de três-pontos operam da mesma forma, exceto que dois ou três pontos no cromossomo, respectivamente, são selecionados para realizar a recombinação. A figura abaixo descreve o processo.



Mutação é a outra forma de introdução de variedade no processo através da mudança aleatória de um gene do cromossomo por outro, ou de um *bit*<sup>6</sup> por outro (por exemplo, a troca do 1 pelo 0 no bit número 6 de um certo cromossomo), em cada geração com uma probabilidade fixa e muito baixa (por exemplo, 1:1000 por bit). A mutação é fundamental se a população de estratégias for pequena ou se esta população se depara continuamente com mudanças no ambiente, porque a mutação previne uma convergência prematura do modelo. É devido a mutação também que o processo não alcança um estado estacionário, dado que sempre um novo elemento estará sendo introduzido no modelo (Riechmann, 1998). O que pode acontecer é uma espécie de convergência de estratégias (cromossomos), situação quando as estratégias se estabilizam no mercado por que possuem desempenho melhor do que qualquer outra estratégia inovativa. A figura abaixo descreve o processo.

<sup>6</sup> *Binary Digit*

FIGURA III: O Processo de Mutação.



Por exemplo, suponha que em cada período um agente escolha sua estratégia dentro de uma população de estratégias disponíveis. A simulação é iniciada supondo-se que os agentes não possuam nenhum conhecimento prévio sobre o mercado (tudo necessita ser aprendido). A seguir são apresentados os passos básicos do processo de seleção AG:

**Passo 1:** Atribuição de estratégias (à cada agente é atribuída uma estratégia aleatoriamente dentre de uma população de estratégias);

**Passo 2:** Jogo e atribuição do *Pay-Off* (as estratégias são avaliadas uma-a-uma de acordo com o resultado gerado no ambiente de interação. Sua pontuação é dada relativamente à média da população);

**Passo 3:** Atualização das estratégias (se todas as estratégias foram utilizadas, elas podem ser selecionadas por um processo de escolha da melhor estratégia, como o AG, que inclui a possibilidade de recombinação e criação de novas estratégias).

Antes dos operadores genéticos (seleção, recombinação e mutação) serem aplicados, a eficiência de um cromossomo (estratégia) em uma população é determinada através da função de sucesso (*fitness function*). Esta função atribui a cada cromossomo uma pontuação de acordo com seu desempenho em relação ao desempenho médio da população atual. A melhor solução é aquela que consegue resolver o problema exposto de forma mais eficiente. Economicamente, o melhor resultado é aquele cuja estratégia é a mais lucrativa ou de maior *pay-off*. Por exemplo, se uma estratégia tem desempenho duas vezes mais alto do que a estratégia com desempenho médio na população, ela terá uma probabilidade de ser escolhida para a reprodução para criação de uma nova geração duas vezes maior que a estratégia média. Assim, estratégias com um maior nível de desempenho se espalham mais rapidamente pela população.

### 3. Aplicação do Algoritmo Genético em um Modelo de Oligopólio

O AG nada mais é do que um modelo de seleção das melhores estratégias através de repetidas interações em um mesmo ambiente. O comportamento dos agentes derivado da estratégia selecionada define o seu resultado (desempenho) no mercado. As melhores estratégias serão

escolhidas de acordo com algum padrão que capte seu desempenho no mercado. Neste processo, as estratégias inicialmente estabelecidas sofrem mudanças e melhoras, pois o AG permite, além da seleção, a recombinação e a mutação das estratégias. É um processo de ajuste no qual o agente é capaz de aprender com as escolhas presentes e passadas e assim modificar ou criar novas estratégias para o futuro. Embora dotado de aleatoriedade, um algoritmo evolucionário não é um simples *random walk*, pois age eficientemente ao explorar informação passada para descobrir novos pontos com desempenho esperado maior (Goldberg, 1989, pp. 1).

O uso de algoritmos evolucionários em modelos de oligopólios é pouco difundido na Literatura, embora o trabalho de Arifovic (1994) sobre um mercado CobWeb seja um divisor de águas. Em seu trabalho, Arifovic utiliza um algoritmo genético para modelar as regras de decisão de produção em um mercado de um único bem homogêneo, cuja variável de competição é a quantidade produzida e as firmas são tomadoras de preço. Os resultados das simulações mostram que o AG converge para o equilíbrio de expectativas racionais para uma grande variedade de parâmetros, operando de uma forma melhor do que outras opções de algoritmos comumente utilizados em modelos Cobweb (como o aprendizado em mínimos quadrados).

Alkemade (2004), por sua vez, utiliza um modelo básico de Cournot para demonstrar que a primeira abordagem de um AG, chamada de abordagem de população única, leva a uma convergência prematura do modelo em relação à segunda abordagem, de população múltipla. Esta convergência prematura estaria relacionada à baixa capacidade de aprendizado dos agentes, que conseguem observar, e possivelmente imitar, apenas estratégias simples de mercado. E mais, analisando diferentes tipos de racionalidade limitada, a autora conclui que as estratégias que mais se aproximam ao resultado do jogo repetido do modelo de Cournot são aquelas mais sofisticadas.

Por fim, Casari (2006) explora o efeito da racionalidade limitada na homogeneidade de firmas individuais em um oligopólio de Cournot. Firms com os mesmos objetivos e as mesmas habilidades, mas modeladas como agentes econômicos adaptativos através de um AG, em um mercado onde a competição é dada via quantidade, mas a racionalidade é limitada, fazem escolhas persistentemente diferentes (Casari, 2006, pp 6).

Neste trabalho quero corroborar exatamente com esta idéia de Casari (2006): o resultado de heterogeneidade das firmas não é derivado da natureza estocástica dos operadores do AG, mas sim da racionalidade limitada do modelo. Utilizar o AG no modelo de Cournot com racionalidade ilimitada leva as firmas simétricas a atingirem o equilíbrio de Nash. Assim, poderei concluir como

aquele autor, mas de uma perspectiva diferente, que o mecanismo de aprendizagem do tipo AG é uma ferramenta consistente.

#### 4. A Aplicação do AG no Modelo de Cournot

O modelo de Cournot<sup>7</sup> aqui utilizado é o mais comum encontrado na Literatura<sup>8</sup>: suponha que a firma  $i$  produza a quantidade  $q_i \in [0, \bar{q}]$  e que todas as  $N$  firmas escolham simultaneamente o nível de produção. O preço de mercado  $P$  é determinado pelo equilíbrio entre oferta e demanda. A função de demanda inversa é  $P = a - bQ$ , no qual  $Q = \sum_{i=1}^N q_i$  e  $a$  e  $b > 0$ , e a função custo é  $C(Q_i) = cq_i$ , linear e idêntica para todas as firmas. Assim, a função lucro é  $\pi_i = q_i(a - bQ) - cq_i$ . O equilíbrio de Nash deste problema de maximização de lucro é  $Q^* = [N/(N+1)][(a - c)/b]$ ,  $P^* = [(a + Nc)/N + 1]$  e  $\Pi^* = [(a - c)^2] / [b(N + 1)^2]$ .

O modelo de Cournot acima foi replicado dinamicamente através do uso de um AG. O objetivo do AG neste trabalho é verificar se as quantidades produzidas pelas firmas, que usam um processo de aprendizagem para tomar suas decisões estratégicas, convergem para a quantidade de equilíbrio  $q^*$ . Primeiramente, a estratégia que a firma  $i$  tem que escolher no período  $t$ , no caso o nível de produção  $q_{i(t)}$ , é identificada através de um único número real, codificado como uma série de zeros e uns, os conhecidos cromossomos, e que estão associados a uma pontuação de acordo com seu desempenho no mercado em termos de lucratividade (a medida do seu sucesso). No aprendizado social (AG de única população), cada firma possui apenas uma possibilidade estratégica que, no entanto, pode se alterar no tempo em decorrência dos operadores genéticos, a reprodução (eliminação de estratégias com baixa pontuação e replicação daquelas com melhores desempenhos), a recombinação (combinação de novas estratégias a partir das estratégias antigas), e a mutação (modificação aleatória de estratégias).

O sucesso do cromossomo  $i$  no período  $t$  é determinado pela lucratividade da firma  $i$  no final do período  $t$ , ou  $\mu_{i(t)} = \pi_{i(t)}$ . No processo de aprendizagem, as estratégias com melhores resultados têm maiores chances de serem selecionadas para os próximos períodos, assim, a probabilidade do cromossomo  $A_{i(t)}$  de ser copiado como  $C_{i(t)}$  é  $P[C_{i(t)}] = \mu_{i(t)} / \sum_{i=1}^n \mu_{i(t)}$ . O operador da reprodução é como uma 'roleta' na qual a cada série (cromossomo) é dada uma um pedaço proporcional ao seu desempenho no meio ambiente. Quando um cromossomo é selecionado para ser reproduzido, uma

<sup>7</sup> Cournot (1897), minuciosamente descrito nos manuais de Organização Industrial (Tirole, 2000 ou Shy, 2000).

<sup>8</sup> Ver Varian, 2007.

cópia exata é feita. Quando  $n$  cópias de cromossomos forem feitas (o número de cromossomos na população é mantido constante), a reprodução foi completada.

A recombinação altera as partes de uma dupla de cromossomos escolhidos aleatoriamente (os pais). Primeiramente, o operador seleciona dois cromossomos aleatoriamente dentre a população de cromossomos. Segundo, um número  $k$  é selecionado, novamente de forma aleatória, dentre os  $(1, \dots, l - 1)$  bits, para separar em duas partes cada cromossomo pai. A nova geração, então, é formada com a troca da parte direita dos cromossomos dos pais. O total de  $n/2$  pares são selecionados e a recombinação ocorre em cada dupla de pais com probabilidade  $P_r$ . Por sua vez, a mutação é um processo aleatório que altera o valor de um bit (gene) numa série de bits (cromossomo). Cada bit tem uma probabilidade muito pequena de ser alterado,  $P_m$ , independentemente dos outros bits (geralmente esta probabilidade é estabelecida em  $1/\text{tamanho do cromossomo}$  (Back et al 1997)).

Depois que os membros da nova população são determinados, a quantidade que irá ser produzida e oferecida no mercado pelas firmas no tempo  $t$  é computada para cada firma. Posteriormente, as quantidades produzidas por cada firma são somadas, e o preço de mercado no período  $t$ ,  $P_t$  é determinado. Os custos de produção são computados para cada período, e o lucro da firma  $i$  (seu desempenho no mercado ou função de sucesso) é calculado para cada geração usando seu preço e quantidade de equilíbrio. Este processo é aplicado iterativamente por  $T$  gerações. A população inicial no período 0 é gerada aleatoriamente.

Os cromossomos para o modelo de Cournot podem ser construídos da maneira demonstrada pela Tabela 1 abaixo, baseando-se nos resultados obtidos caso sejam adotados os parâmetros  $N = 8$ ,  $\bar{q} = 18$ ,  $a = 23/2$ ,  $b = 1/16$ ,  $c = 5/2$ . Os valores do equilíbrio de Nash serão  $Q^* = 128$ ,  $q_i^* = 16$ , e  $P^* = 3,5$ . Neste ponto de equilíbrio, a lucratividade da indústria é menor do que o lucro de monopólio, mais precisamente constitui cerca de 40% do lucro de monopólio, mas é maior do que o lucro em concorrência perfeita, sabidamente igual a zero.

Cada cromossomo codifica uma estratégia, que no caso é a escolha da quantidade que cada firma individual irá ofertar. À esta quantidade está relacionada um lucro, dado o preço de equilíbrio de mercado ( $P = 3,5$ ). A melhor estratégia, para um mercado com oito firmas é ofertar dezesseis unidades do bem, auferindo um lucro de dezesseis unidades monetárias (que representa quarenta por cento do lucro de monopólio).

TABELA 1: CROMOSSOMOS

Cromossomo	Interpretação ( $q_{i(t)}$ )	Desempenho ( $\pi_{i(t)}$ )
0 0 0 0	$q_{i(t)} = 0$	$\pi_{i(t)} = 0$
1 0 0 0	$q_{i(t)} = 1$	$\pi_{i(t)} = 1$
0 1 0 0	$q_{i(t)} = 2$	$\pi_{i(t)} = 2$
0 0 1 0	$q_{i(t)} = 3$	$\pi_{i(t)} = 3$
1 0 0 1	$q_{i(t)} = 4$	$\pi_{i(t)} = 4$
1 1 0 0	$q_{i(t)} = 6$	$\pi_{i(t)} = 5$
0 1 1 0	$q_{i(t)} = 6$	$\pi_{i(t)} = 6$
0 0 1 1	$q_{i(t)} = 7$	$\pi_{i(t)} = 7$
1 0 0 1	$q_{i(t)} = 8$	$\pi_{i(t)} = 8$
1 0 1 0	$q_{i(t)} = 9$	$\pi_{i(t)} = 9$
0 1 0 1	$q_{i(t)} = 10$	$\pi_{i(t)} = 10$
1 1 1 0	$q_{i(t)} = 11$	$\pi_{i(t)} = 11$
1 1 0 1	$q_{i(t)} = 12$	$\pi_{i(t)} = 12$
1 0 1 1	$q_{i(t)} = 14$	$\pi_{i(t)} = 14$
0 1 1 1	$q_{i(t)} = 16$	$\pi_{i(t)} = 16$
1 1 1 1	$q_{i(t)} = 18$	$\pi_{i(t)} = 0$

## 5. Simulações e Resultados

A cada período  $t$ , a firma  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) escolhe a ação sobre a quantidade a ser produzida,  $q_{i(t)} \in [0, \bar{q}]$ . A quantidade ofertada por cada firma no tempo  $t$ ,  $q_{i(t)}$  é aproximada por uma série de bits  $\{0, 1\}$ . Assim, consideramos que os cromossomos são binários, isto é, que consistem em uma série de zeros e uns, e que todos sejam completamente determinados, isto é, não existe bit (gene) que não esteja especificado como zero ou um<sup>9</sup>. Para determinar o *fitness* de um cromossomo é necessário observar o *fitness* de todos os cromossomos da população da qual faz parte.

Para a simulação<sup>10</sup> foram criados dezesseis cromossomos cada um com quatro bits. A quebra para reprodução ocorreu na metade dos cromossomos com probabilidade  $P_r = 0,3$  e a mutação ocorreu aleatoriamente em um único bit com probabilidade de  $P_m = 0,02$ . O tempo da simulação foi de

<sup>9</sup> Em alguns trabalhos encontramos genes não determinados como em (Birchenhall, Kastrinos & Metcalfe, 1995) e ADM (XXXX)

<sup>10</sup> Feita em NetLogo versão 3.1.

1.000 períodos, mais do que suficiente para a ocorrência da estabilidade do sistema. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 2 a seguir.

**TABELA 2 - RESULTADO\***

VARIÁVEL	COURNOT – NASH	COURNOT - AG
Q	128 (0)**	130 (10)
Qf	16	17,5 (5)
P	3,5 (0)	3,4 (0,5)
Pr	16 (40%)	14 (35%)

O resultado obtido com a replicação do modelo de Cournot através de um AG foi muito próximo ao resultado do modelo estático, isto é, o modelo Cournot-AG convergiu para o equilíbrio de Nash. Isto nos diz que o AG mantém a consistência do modelo utilizado, pois, na aplicação do AG que fiz neste trabalho, a nova população gerada depois do processo de seleção, recombinação e mutação, é construída elemento a elemento na forma de uma roleta: cada novo ponto é selecionado aleatoriamente dentre todos os elementos da antiga população, na qual a probabilidade de selecionar um ponto é proporcional ao seu desempenho (lucro). Obviamente, dado que o maior lucro que uma firma competindo em Cournot pode obter é aquele dado pela quantidade do equilíbrio de Nash, esta estratégia será sempre a mais bem sucedida e replicada.

No caso aqui demonstrado, a recombinação e a mutação não introduziram uma estratégia melhor, já que não existe estratégia melhor do a que gera o equilíbrio estático neste modelo de oligopólio. A recombinação e a mutação foram infrutíferas para trazer um elemento novo no processo e só serviram para evitar a convergência prematura do modelo. Assim, o AG utilizado para replicar o modelo de Cournot nada mais é do que um processo de ‘*Replicator Dynamics*’ (Birchenhall, Kastrinos & Metcalfe, 1996), muito utilizado pela Literatura Evolucionária<sup>11</sup>.

O replicador dinâmico é uma função não-linear e monotônica, utilizada em Jogos Evolucionários para modelar a ‘replicagem’ dos agentes no tempo, dinamicamente, com o diferencial dos outros replicadores já que permite que o sucesso de uma estratégia seja atribuído relativamente às outras estratégias da população, ao invés de ser constante no tempo. Este é dado pela seguinte equação continua:

\* Q é a quantidade total produzida, Qf é a quantidade produzida por cada firma, P é o preço de mercado e pr é o lucro obtido por cada firma.

\*\* Desvio-Padrão

<sup>11</sup> Silverberg (1987) e Possas et al (2005)

$$X_{(i-1)} = X_i [f(x_i) - Y(x_i)]$$

No qual  $Y(x_i) = \sum x_i * f_i(x)$ ;  $x_i$  é a proporção da estratégia  $i$  na população;  $x = x_1 \dots x_n$  é o vetor de distribuição de estratégias na população;  $f_i(x)$  é o sucesso da estratégia  $i$  (que depende da população) e  $Y(x)$  é o sucesso médio da população (dada pela média ponderada de sucesso dos  $n$  tipos de estratégias na população).

Este replicador, assim, nada mais é do que o processo de seleção do AG, diferenciando deste na introdução do novo elemento através da ‘replicagem’ e mutação. O replicador dinâmico seleciona a melhor estratégia das já existentes, mas não introduz estratégias novas no sistema, caso que só ocorre no AG. O AG, desta forma, permite o real aprendizado pela população já que possibilita a inovação e posterior imitação de estratégias (melhores ou piores que as encontradas na população original).

O uso do *replicator dynamics* é referência em Jogos Evolucionários, já que possibilita a obtenção de equilíbrios evolucionários estáveis – EEE (Riechmann, 1998), introduzidos por Maynard Smith (1974, 1982). De qualquer forma, se as condições iniciais do modelo de oligopólio estático são de homogeneidade das firmas, o ‘replicador dinâmico’ gerará sempre o resultado de equilíbrio (Vega-Redondo, 1997). Isto porque com este tipo de ‘replicador’ um aumento de produção de uma das firmas (redução de preço) estimula uma redução de produção (aumento de preço) da rival já que as curvas de reação são negativamente inclinadas ou as conjecturas são substitutas (Dockner, 1992, Maskin & Tirole, 1987 e Driskill & McCafferty, 1989).

Assim, o que eu estou querendo dizer é que o AG é um instrumento consistente para captar processos evolucionários, mesmo se introduzirmos a replicação e a mutação (dado que a seleção *per se* é um EEE). Segundo Friedman (1998, p. 16), os processos são evolucionários quando podem ser formalizados em modelos de interação estratégica ao longo do tempo que cumprem três condições: i) as estratégias com maiores desempenhos tendem a substituir aquelas com desempenhos menores; ii) existência de uma certa inércia no processo; e iii) os agentes não conseguem influenciar as ações futuras dos outros agentes.

Inicialmente, é fácil constatar que o AG é um modelo de interação estratégica, já que nada mais é do que um modelo de aprendizado social no qual cada agente busca encontrar uma estratégia de comportamento com melhor desempenho na população de estratégias. É um modelo dinâmico no

qual as estratégias com melhores desempenhos são preferíveis àquelas com piores desempenhos (e processo de seleção que é igual ao ‘replicador dinâmico’ da teoria dos jogos evolucionária).

Quanto à inércia, dado que a mutação é o principal fator de mudanças abruptas no processo de aprendizado do AG, uma probabilidade menor de ocorrência da mutação é preferível a uma maior. Assim, dado que a taxa de mutação é um parâmetro do modelo, transformar o AG em um processo de aprendizado que contém um componente inercial é conseqüente.

Por fim, os agentes em um processo AG possuem conhecimento restrito devido à racionalidade limitada inerente a este tipo de modelagem. Em cada rodada, este agente escolhe a sua estratégia sem saber nada sobre os planos dos outros agentes do sistema. O que o agente econômico neste sistema pode fazer é tentar escolher sua melhor estratégia dada a escolha de estratégia passada dos outros agentes, já que as rodadas mais recentes podem ser memorizadas por todos. Como os agentes consideram apenas as ações passadas dos seus oponentes quando da tomada de decisão, podemos concluir que não existe nenhum tipo de influência sistemática nas ações futuras dos agentes econômicos.

Assim, pode-se dizer que o AG é um instrumento evolucionário consistente. O AG trará grande colaboração para o desenvolvimento de modelos da economia evolucionária (Birchenhall, Kastrinos & Metcalfe, 1996, pp. 1), sobretudo daqueles em que a interação estratégica entre os agentes é parte fundamental do seu desenvolvimento, como é o caso dos modelos de oligopólio. Então, o resultado deste trabalho, corroborando com o de Casari (2006), conclui que firmas homogêneas inseridas em um ambiente de racionalidade limitada fazem escolhas diferentes porque passam por um processo de aprendizado que estimula assimetrias, e estas não são derivadas da estocasticidade dos operadores do AG, mas sim da característica evolucionária do processo de ‘replicagem’ dinâmica.

## **6. Conclusão**

Este trabalho mostrou que o Algoritmo Genético é uma ferramenta consistente para ser utilizada em modelos de oligopólios evolucionários. Neste caso, a diversidade entre firmas seria decorrente do processo concorrencial e não da estocasticidade dos operadores do AG, já que em um modelo de oligopólio com firmas homogêneas e racionalidade ilimitada, como o modelo de Cournot, o resultado encontrado foi próximo ao equilíbrio de Nash, mostrando que este replicador levou à convergência dos parâmetros.

## Referências Bibliográficas

- AXELROD, R. *The evolution of cooperation*. New York: Basic Books. 1994
- BACK, T.; U. HAMMEL & H.P. SCHWEFEL. *Evolutionary computation: Comments on the history and current state*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation 1(1), 3{17}. 1997
- BAKER, J. & RUBINFELD, D. Empirical Methods in Antitrust Litigation: Review and Critique. *American Law and Economics Review*, 386 – 435. 1999
- BERRY, S. & PAKES, A. Some Applications and Limitations of Recent Advances in Empirical Industrial Organization: Merger Analysis. *American Economic Review* 83 No. 2: 247-252. 1993
- BRESNAHAN, T. Duopoly Models with Consistent Conjectures. *American Economic Review* 71: 934-945. 1981
- ERICSON, R. & PAKES, A. Markov-Perfect Industry Dynamics: A Framework for Empirical Work. *Rand Journal of Economics* 95. pp 53-82. 1995
- FIUZA, E. P. S. *Estudos Econométricos em Organização Industrial no Brasil*. Em LISBOA, M. B & MENEZES-FILHO, N. A (Org). *Microeconomia e sociedade no Brasil*. Rio de Janeiro: Contra Capa Livraria, 2001
- GIACOLI, N. *The Escape from Conjectural Variations: the Consistency Condition in Duopoly Theory From Bowley to Fellner*, *Cambridge Journal of Economics*, 29, p. 601. 2005
- HOLLAND, J.H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor (MI). 1975
- HUSE, C. & SALVO, A. Métodos Empíricos em Organização Industrial. *Seminários sobre Defesa da Concorrência*. IPEA. 2005
- KUPFER, D., HASENCLEVER, L. (Orgs) *Economia industrial: fundamentos teóricos e práticas no Brasil*. Rio de Janeiro: Campus, 2002. 640p. 2002
- MITCHELL, M. *An introduction to genetic algorithms*. MIT Press, Cambridge (MA). 1996
- PAKES, A. and McGUIRE P. Computing Perfect-Markov Nash Equilibria: Numerical Implications of a Dynamic Differentiated Product Model. *RAND Journal of Economics*. 25: 555-589. 1994
- POSSAS, M. & KOBLITZ, A. *Um modelo evolucionário setorial*. *Revista Brasileira de Economia*, 55(3). 2001
- SILVERBERG, G. *Technical progress, capital accumulation and effective demand: A self-organization model*. In Batten, D., Casti, J., & Johansson, B., editors, *Economic Evolution and Structural Adjustment*. Springer Verlag, Berlin. 1997
- TIROLE, J. *The Theory of Industrial Organization*. Cambridge (Mass.): MIT Press. 1988.